Schnelle Berechnungen (ohne Divisionen) mit der Newton-Iteration

Ac 2021-2022

Es sollen schnelle Algorithmen mit beliebig vielen Dezimalen für die i.A. langsamen Operationen Division, Quadratwurzel, n-te Wurzel entwickelt werden.

Zu diesem Zweck muss man versuchen, die Division bei diesen Algorithmen zu umgehen, weil hierbei die meiste Zeit verloren geht !

Selbst die Operation "Division" kann man durchführen, ohne dabei zu dividieren (zumindest nicht in den Schleifenumläufen), wie weiter unten gezeigt wird.

Der verwendete Algorithmus ist in allen Fällen die **Newton-Iteration** zur Nullstellenbestimmung einer Funktion f(x), die folgendermaßen definiert ist :

Gesucht ist die Lösung $\bar{x}$ der Gleichung $f(x) = 0$:
Mit einem Startwert x_0 in der Nähe von $\bar{x}$ konvergiert die folgende Newton-Iteration quadratisch, falls $f'(x) \neq 0$:

$$\boxed{x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)}}$$

Anmerkungen :

1) "Quadratische Konvergenz" bedeutet eine Verdopplung gültiger Stellen bei jedem Iterationsschritt .

2) Obige Iterationsformel wird in geschickter Weise so verwendet, dass „kostspielige“ Operationen (z.B. Division) vermieden werden !

1) Divisions - Algorithmus :

Die Division u / v wird zerlegt in u / v = u · 1 / v , also Multiplikation und Kehrwert !

Entwicklung eines Algorithmus für 1 / v (ohne Divisionen !) nach dem Newton-Verfahren:

Setze f(x) = 1 - 1 / v · 1 / x , denn x = 1 / v ist dann eine Nullstelle von f !

Dann gilt f '(x) = 1 / v · 1 / x² und somit ist die Newton-Iterationsformel:

$$x_{i+1} = x_i - \frac{1 - \frac{1}{v}\cdot\frac{1}{x_i}}{\frac{1}{v}\cdot\frac{1}{x_i^2}} = x_i - v\cdot x_i^2 + x_i = 2\cdot x_i - v\cdot x_i^2$$

$\boxed{x_{i+1} = x_i\cdot(2 - v\cdot x_i)}$ konvergiert quadratisch gegen $\frac{1}{v}$; keine Division erforderlich !!

Vorgehensweise:

Zunächst Startwert $x_0 \approx 1 / v$ bilden und dann iterieren gemäß obiger Formel:
Nach der Iteration dann noch mit u multiplizieren.

Beispiel für die Kehrwertbildung: 1/17 , also v = 17

Wähle x_0 = 0,0588235294 **10** richtige Dezimalen
2 - 17 · 0,0588235294 = 2 - 0,9999999998 = 1,0000000002
x_1 = 0,0588235294 · 1,0000000002
x_1 = 0,05882352941176470588 **20** richtige Dezimalen
2 - 17 · 0,05882352941176470588 = 1,00000000000000000004
x_2 = 0,05882352941176470588 · 1,00000000000000000004
x_2 = 0,0588235294117647058823529411764705882352 **40** richtige Dezimalen
2 - 17 · 0,0588235294117647058823529411764705882352 =
1,0000000000000000000000000000000000000016
x_3 = 0,0588235294117647058823529411764705882352 ·
1,0000000000000000000000000000000000000016
x_3 = 0,0588235294117647058823529411764705882352941176470588235294117647058823529411764705882352941176470588235
294117632 **78** richtige Dezimalen für 1/17

Zum Vergleich: 1/17 mit 100 gültigen Dezimalen:
0,0588235294117647058823529411764705882352941176470588235294117647058823529411764705882352941
1764705882352941176470588

2) Quadratwurzel – Algorithmus :

Ansatz:

$$\boxed{\sqrt{d} = \frac{1}{\sqrt{d}} \cdot d} \text{ , wobei } \frac{1}{\sqrt{d}} = \sqrt{\frac{1}{d}} = \left(\frac{1}{d}\right)^{\frac{1}{2}}$$

Auch hier wieder die Verwendung des Kehrwertes !
Entwicklung eines Algorithmus für 1/√(d) (ohne Divisionen !) nach dem Newton-Verfahren:

Setze $f(x) = 1 - (1/d) / x^2$, denn $x = 1/\sqrt{d}$ ist dann eine Nullstelle von f !

Dann gilt $f'(x) = 2 \cdot (1/d) / x^3$ und somit ist die Iterationsformel

$$x_{i+1} = x_i - \frac{1 - \frac{1}{\mathrm{d}} \cdot \frac{1}{x_i^2}}{2 \cdot \frac{1}{\mathrm{d}} \cdot \frac{1}{x_i^3}} = x_i - \frac{1}{2} \cdot \mathrm{d} \cdot x_i^3 + \frac{1}{2} \cdot x_i = \frac{3}{2} \cdot x_i - \frac{1}{2} \cdot \mathrm{d} \cdot x_i^3$$

$$\boxed{x_{i+1} = 0{,}5 \cdot x_i \cdot (3 - \mathrm{d} \cdot x_i^2)} \quad \text{konvergiert quadratisch gegen } \frac{1}{\sqrt{\mathrm{d}}}$$

Vorgehensweise:

Zunächst Startwert $x_0 \approx 1/\sqrt{d}$ bilden und dann iterieren gemäß obiger Newton-Formel:
Nach der Iteration dann noch mit d multiplizieren.

Beispiel für die Qudratwurzelberechnung: √(8) , also d = 8

Approximation von 1/√(8) :

Wähle x_0 = 0,35355339059327373 (double-Wert für 1/√(8) ; **16** richtige Dezimalen)

Dann ist 3 - 8·0,35355339059327372² = 2,0000000000000002387216375452588928 und
x_1 = 0,5 · 0,35355339059327372 · 2,0000000000000002387216375452588928
x_1 = 0,353553390593273762200422181052416964027001847268608 (**31** richtige Dezimalen)

3 – 8· 0,353553390593273762200422181052416964027001847268608² =
2,000000000000000000000000000000042741015174217473591084093111762515147023190
005220094870133519181938688 und
x_2 = 0,5 · 0,353553390593273762200422181052416964027001847268608 ·
2,000000000000000000000000000000042741015174217473591084093111762515147023190
005220094870133519181938688
x_2 = 0,35355339059327376220042218105242451964241796884423701829416993425548211
4752273958458056534034152565763877693754717111302115661253528251164968589461
553152
63 richtige Dezimalen nach der 2.Iteration für 1/√(8)

Ergebnis: $\sqrt{(8)} = 1 / \sqrt{(8)} \cdot 8 \approx$
2,8284271247461900976033774484193961571393437507538961463533594740438569180181916676644522722732205261110215500377368904169252900282260093197487156924252 16

62 richtige Dezimalen nach der 2.Iteration für $\sqrt{(8)}$!

Auf 100 Dezimalen genau gilt: $\sqrt{(8)} \approx$
2,82842712474619009760337744841939615713934375075389614635335947598146495692421407770077506865528314 54

3) n-te Wurzel (mit n > 2) :

Ansatz:

$$\boxed{\sqrt[n]{d} = \frac{1}{\sqrt[n]{d^{n-1}}}\cdot d} \text{ , wobei } \frac{1}{\sqrt[n]{d^{n-1}}} = \frac{1}{(d^{n-1})^{\frac{1}{n}}} = \frac{1}{d^{(n-1)\cdot\frac{1}{n}}} = \frac{1}{d^{1-\frac{1}{n}}} = (d^{1-\frac{1}{n}})^{-1} = d^{\frac{1}{n}-1}$$

Entwicklung eines Algorithmus für $1 / \sqrt[n]{d^{n-1}}$ (ohne Divisionen !) nach dem Newton-Verfahren:

Setze $f(x) = 1 - (1/d)^{n-1} / x^n$, denn $x = 1 / \sqrt[n]{d^{n-1}}$ ist dann eine Nullstelle von f !

Dann gilt $f'(x) = n\cdot(1/d)^{n-1} / x^{n+1}$ und somit ist die Iterationsformel

$$x_{i+1} = x_i - \frac{1-(\frac{1}{d})^{n-1}\cdot\frac{1}{x_i^{\,n}}}{n\cdot(\frac{1}{d})^{n-1}\cdot\frac{1}{x_i^{\,n+1}}} = x_i - \frac{1}{n}\cdot d^{n-1}\cdot x_i^{\,n+1} + \frac{1}{n}\cdot x_i = \frac{n+1}{n}\cdot x_i - \frac{1}{n}\cdot d^{n-1}\cdot x_i^{\,n+1}$$

$$\boxed{x_{i+1} = \frac{1}{n}\cdot x_i\cdot(n+1 - d^{n-1}\cdot x_i^{\,n})} \text{ konvergiert quadratisch gegen } \frac{1}{\sqrt[n]{d^{n-1}}}$$

Hinweis: $\frac{1}{n}$ und d^{n-1} sind konstant und müssen daher nur ein einziges Mal berechnet werden !

Vorgehensweise:

Zunächst Startwert $x_0 \approx 1 / \sqrt[n]{d^{n-1}}$ bilden und dann iterieren gemäß der Newton-Formel:
Nach der Iteration dann noch mit d multiplizieren.

Beispiel für die n-te Wurzelberechnung: $\sqrt[4]{8}$, also d = 8 und n = 4; 1/n = 0,25 $d^3 = 512$

Zunächst die Approximation von $1 / \sqrt[4]{8^3} = 8^{-3/4}$:

Wähle x_0 = 0,21022410381342863 (double-Wert für $1 / \sqrt[4]{8^3}$; **17** richtige Dezimalen)

Dann ist $5 - 512 \cdot 0{,}21022410381342863^4$ =
4,00000000000000010955511313142788262515106829474197300826639380807168
x_1 = 0,25 · 0,21022410381342863 ·
4,00000000000000010955511313142788262515106829474197300826639380807168
x_1 = 0,2102241038134286357577813690583033295135152698328269795353533827394336195108174010496 (**33** richtige Dezimalen)

$5 - 512 \cdot 0{,}2102241038134286357577813690583033295135152698328269795353533827394336195108174010496^4$ =
4,00000000000000000000000000000000750145175827497671214345563233984740780836955045056650292013629214031187813238658702090361699323401345243572029673610770470363960679867067031209332415608054586040370685566340902912

$x_2 = 0{,}25 \cdot$
0,2102241038134286357577813690583033295135152698328269795353533827394336195108174010496 $\cdot$
4,0000000000000000000000000000000750145175827497671214345563233984740780836955045056650292013629214031187813238658702090361699323401345243572029673610770470363960679867067031209332415608054586040370685566340902912

$x_2 =$
0,210224103813428635757781369058303723760008565589196127703306521491882800582021062807464266384518818778971769558606977272913424792354641118044772072839445961865007788888261928457327995751005145540356188433080154726044482018619057957740310701729325184687702438129482095339772392841644093979201241088

65 richtige Dezimalen nach der 2.Iteration für $1/\sqrt[4]{(8^3)}$

<u>Ergebnis:</u> $\sqrt[4]{(8)} = 1 / \sqrt[4]{(8^3)} \cdot 8 \approx$
1,681792830507429086062250952466429790080068524713569021626452171935062404656168502459714131076150550231774156468855818183307398338837128944358176582715567694920062311106095427658623966008041164322849507464641237808355856148952463661922485613834601477501619505035856762718179142733152751833609928704

64 richtige Dezimalen nach der 2.Iteration für $\sqrt[4]{(8)}$

Auf 100 Dezimalen genau gilt : $\sqrt[4]{(8)} \approx$
1,68179283050742908606225095246642979008006852471356902162645217194984950990780447962864800839858507234